□ 夏国忠　施锡铨

# 商家逃税问题的复合泊淞流匡算模式

## 一、问题由来

商家逃税是一个普遍性问题，如果能对商家逃税额度进行可能性匡算，建立预测概率模式，那么不论是对税务部门征管，还是对统计部门核算，均具有一定的参考价值。

众所周知，商家逃避税收征管的常用手段之一是隐瞒商品销售额。为了数字处理方便，暂定义"纳税率"为应纳税额与真实销售额之比，这里的纳税率并非税务务实中某一单项税率，对于某一种商品来说，它可能是一固定比值，不同商品品种，纳税率可以不同。假设有专营销售某种电器的专卖店，根据抽样资料，其日均销售电器 λ(件)，平均不入帐率 P，该店存在逃税现象，如果电器售价 a 元/件，纳税率 α，问该店日均逃税多少？显然，这是一个极简单的算术匡算问题：

日均销售 λ(件) $\xrightarrow{\text{平均不入帐百分比 P}}$ 日均未纳税电器件数 λ·P(件)

$\xrightarrow{\text{电器售价 a 元/件}}$ 日均未纳税销售额 λ·P·a(元) $\xrightarrow{\text{纳税率 }\alpha}$

日均逃税额 λ·P·a·α(元) $\xrightarrow{\text{时段 }\tau\text{ 内}}$ 时段 τ 内平均逃税额 λ·P·a·α·τ(元)

上面匡算了一天和 τ 时段内平均逃税额度问题。

如果问某一天逃税额是多少呢？这是一个具有一定现实意义的可能性预测问题，对于它的最好回答应该既考虑到各种可能的逃税额度值，又要考虑到各种逃税额度值出现所相应的可能性——概率。此时，如果还是把上述简单算术匡算结果——日均逃税额作为最终回答，这种以一代万，以一种可能性代替所有可能性的作法，显得过于简单化，引起的误差无疑会较大，难以使人信服。

商店某一天销售电器件数应视为一离散型随机变量 ξ，它可能取有穷非负整数值中任一值，$\xi=0,1,2\cdots k\cdots$，ξ 以不同可能性 $P(\xi=k)$ 取不同 k 值，显然 $\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi=k)=1$。

我们知道，出售每一件电器，存在着入帐纳税和不入帐逃税两种可能，实质上是一个贝努里试验。若出售第 i 件电器结果记作 $\gamma_i$，不入帐逃税记 $\gamma_i=1$，入帐纳税记 $\gamma_i=0$，而记日销售 ξ 件电器中逃税件数为随机变量 γ，显然：

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\xi$$

在电器售价为 a 元/件，纳税率为 α 情况下，日逃税额当然也为一随机变量，记作 η，必然有：

$$\eta=a\cdot\alpha\cdot\gamma$$

因此，日逃税额各种可能匡算值为：

$$\eta=a\cdot\alpha\cdot\gamma\qquad\gamma=0,1,2\cdots$$

各种匡算值对应可能性——概率为：

$$P(\eta=a\cdot\alpha\cdot k)=P(\gamma=k)\qquad k=0,1,2,\cdots\cdots$$

非常明显，建立日逃税额匡算模式，实质转化为在一定参数条件下，如何确定日逃税 $\gamma$ 这一复合随机变量之概率分布模型问题。

## 二、逃税额匡算模式——复合泊淞流型

### 1. 一种商品逃税额概率匡算模式

源源不断地出现的许多随机事件，构成一个随机事件流，上述电器专卖店日销售电器件数，构成一个随机事件流。

显然，每日销售量 $\xi$ 具有非负整型取值性质；直观上和初步分析表明，$\xi$ 同时具有，或者至少近似具有独立性、平衡性和普通性三性特征，因此可以较合理地认为 $\xi$ 为泊淞流型。在泊淞流强度参量——日均销售量 $\lambda$(件)(抽样算术平均值常为其优良估计)确定后，一种商品(电器)的销售量 $\xi$ 符合泊淞分布：

$$\xi\sim P(k_{i}\quad\lambda)$$

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^{k}}{k_{!}}e^{-\lambda}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

$\xi$ 之母函数为 $G(s)=e^{\lambda(S-1)}$

由前面分析可知，每售一件电器为一贝努里试验 $\gamma_i$，若每售一件电器不入帐逃税概率为 P(商家常以不开发票形式不入帐，进而逃税，参数 P 也可用抽样百分比来估计)，那么 $P(\gamma_i=1)=P$，$P(\gamma_i=0)=1-P=q$，$\gamma_i$ 之母函数 $F(s)=q+Ps$，不难看出，日销售电器件数 $\xi$ 实质上是一贝努里过程，其中日逃税件数为复合随机变量 $\gamma$：

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\xi$$

$\gamma$ 之母函数为：

$$H(s)=G(F(s))=e^{\lambda(q+Ps-1)}=e^{\lambda\cdot P(s-1)}$$

显然，$\gamma$ 为一复合的泊淞流，符合参数为 $\lambda\cdot P$ 之泊淞分布：

$$\gamma\sim P(k;\lambda\cdot P)$$

$$P(\gamma=k)=\frac{(\lambda\cdot P)^{k}}{K_{!}}e^{-\lambda\cdot P}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

若电器售价 a 元/件和纳税率 $\alpha$ 已知，且记 $\beta=a\cdot\alpha$，日逃税额度 $\eta=a\cdot\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$

因此，单一商品(这里为一种电器)日逃税额可能结果及相应概率之匡算模式为：

$$P(\eta=\beta k)=P(\gamma=k)=\frac{(\lambda\cdot P)^{k}}{k_{!}}e^{-\lambda\cdot P}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

利用泊淞流可加性推而广之，任意连续时间尺度 $\tau$ 内逃税额匡算模式：

$$P(\eta_\tau=\beta\cdot k)=P(\gamma_\tau=k)=\frac{(\lambda\cdot P\cdot\tau)^{k}}{k_{!}}e^{-\lambda\cdot P\cdot\tau}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

### 2. 多种商品逃税额匡算模式

前面讨论了一种商品逃税额匡算模型，实际情况是商家常常同时经营多种商品，假如上述电器店同时经营 n 种电器，其售价和纳税率分别为 $a_i$ 元/件，$\alpha_i$，$i=1,2\cdots\cdots n$。并且抽样资料显示，第 i 种电器日均销售 $\lambda_i$(件)，每售一件逃税可能性 $P_i$，$i=\overline{1,n}$。若能建立这种情况下逃税总额匡算模式，更符合实际情况，更具有现实意义。

不失一般性，第 i 种电器日销售 $\xi_i$ 件，日逃税件数 $\gamma_i$，日逃税额 $\eta_i$，利用前述分析结果，有如下结论：

$$\xi_i \sim P(k;\lambda_i)$$
$$\gamma_i \sim P(k;\lambda_i \cdot P_i)$$
$$\eta_i = a_i \cdot \alpha_i \cdot \gamma_i = \beta_i \gamma_i$$
$$P(\eta_i=\beta_i k)=P(\gamma_i=k)=\frac{(\lambda_i P_i)^k}{k_!}e^{-\lambda_i P_i} \qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

从直观上看，一种电器销量对另一种电器销量影响不大，那么可以假定 $\xi_i(i=\overline{1,n})$ 间相互独立。n 种电器日总逃税额为：

$$\eta_{总}=\sum_{i=1}^{n}\eta_i=\sum_{i=1}^{n}a_i \cdot \alpha_i \cdot \gamma_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i$$

直接建立 $\eta_{总}$ 的匡算模式相当困难、复杂，并且实用性不大，但是，日总逃税件数 $\gamma_{总}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$ 的匡算模式利用泊淞流可加性，可以简单、方便地构建起来，为简化问题，利用中值定理：

$$\eta_{总}=\sum_{i=1}^{n}a_i \cdot \alpha_i \cdot \gamma_i=\overline{a \cdot \alpha}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\bar{\beta} \cdot \gamma_{总}$$

这里求和平均 $\bar{\beta}$ 可用算术平均作为估计：

$$\bar{\beta}=\hat{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$$

由泊淞流可加性：

$$\gamma_{总}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \sim P(k;\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot P_i)$$

因此，n 种商品（这里为 n 种电器）日可能逃税额及相应概率之匡算模式为：

$$P(\eta_{总}=\hat{\beta} \cdot k=P(\gamma_{总}=k)=\frac{(\sum_{1}^{n}\lambda_i P_i)^k}{k_!}e^{-\sum_{1}^{n}\lambda_i P_i}) \qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

推而广之，n 种商品在时段 $\tau$ 内逃税额 $\eta_{总}^{\tau}$ 匡算模式为：

$$P(\eta_{总}^{\tau}=\beta\gamma_{总}^{\tau}=\hat{\beta}k)=P(\gamma_{总}^{\tau}=k)=\frac{[\sum_{1}^{n}(\lambda_i P_i \cdot \tau)]^k}{k_!}e^{-\sum_{1}^{n}\lambda_i P_i \cdot \tau}) \qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

## 三、匡算模式实例分析

1. 单一商品匡算实例

今有某一电器专卖店，根据抽样，模式参数为：日均销售电器件数 $\lambda=20$ 件，每售一件逃税率 $P=20\%$，$\lambda \cdot P=4$（件）。其它参数为：电器售价 $a=4000$ 元/件，纳税率 $\alpha=10\%$，$\beta=a \cdot \alpha=400$ 元/件，该店日逃税额匡算模式如下：

$$P(\eta=400k)=P(\gamma=k)=\frac{(\lambda P)^k}{k_!}e^{-\lambda \cdot P}=\frac{4^k}{k_!}e^{-k} \qquad (k=0,1,2\cdots\cdots)$$

该店旬（$\tau=10$ 天）逃税额匡算模式为：

$$P(\eta_{旬}=400k)=P(\gamma_{旬}=k)\frac{(\lambda P\tau)^k}{k_!}e^{\lambda P\tau}=\frac{40^k}{k_!}e^{-40} \qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

月($\tau=30$ 天)逃税额匡算模式为：

$$P(\eta_{月}=400k)=P(\gamma_{月}=k)=\frac{(\lambda P\tau)^k}{k!}e^{\lambda P\tau}=\frac{120^k}{k!}e^{-120}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

限于篇幅，本文仅对日逃税额进行分析，匡算结果统一列于表1中。

表1 单一商品日匡算结果：$\lambda=20$ 件/日，$P=20\%$，$\lambda P=4$ 件/日；$a=4000$ 元/件，$\alpha=10\%$，$\beta=400$ 元/件

| 日逃税件数 $\gamma$(件) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | >10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日光税匡算额 $\eta$(元) | 0 | 400 | 800 | 1200 | 1600 | 2000 | 2400 | 2800 | 3200 | 3600 | 4000 | >4000 |
| 相应概率 $\frac{4^k}{k!}e^{-4}$ | 1.83% | 7.33% | 14.65% | 19.54% | 19.54% | 15.63% | 10.42% | 5.95% | 2.98% | 1.32% | 0.53% | 0.28% |
| 日逃税可能区间 | ≤0 | ≤400 | ≤800 | ≤1200 | ≤1600 | ≤2000 | ≤2400 | ≤2800 | ≤3200 | ≤3600 | ≤4000 | ≥0 |
| 相应概率 | 1.83% | 9.16% | 23.81% | 43.35% | 62.89% | 78.52% | 88.94% | 94.89% | 97.87% | 99.19% | 99.72% | 100% |

2. 多商品匡算实例

某电器商品店经营三种电器，根据抽样，模式参数 $\lambda_1=20$ 件/日，$\lambda_2=10$ 件/日，$\lambda_3=15$ 件/日；$P_1=20\%$，$P_2=10\%$，$P_3=20\%$。其它参数：$a_1=4000$ 元/件，$a_2=2500$ 元/件，$a_3=3500$ 元/件；$\alpha_1=10\%$，$\alpha_2=10\%$，$\alpha_3=10\%$，显然 $\sum_1^3\lambda_iP_i=8$，$\hat{\beta}=\overline{a\cdot\alpha}=\frac{1}{3}\sum_1^3a_i\alpha_i=300$ 元/件。

日匡算模式：

$$P(\eta_{总}=300k)=P(\gamma_{总}=k)=\frac{(\sum_1^3\lambda_iP_i)^k}{k!}e^{-\sum_1^3(\lambda_iP_i)}=\frac{8^k}{k!}e^{-8}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

旬匡算模式：

$$P(\eta_{旬}=300k)=P(\gamma_{旬}=k)=\frac{[\sum_1^3(\lambda_iP_i\tau)]^k}{k!}e^{-\sum_1^3(\lambda_iP_i\tau)}=\frac{80^k}{k!}e^{-80}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

月匡算模式：

$$P(\eta_{月}=300k)=P(\gamma_{月}=k)=\frac{240^k}{k!}e^{-240}\qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

日匡算结果见表2：

表2 多商品日匡算结果：模式参数 $\begin{cases}\lambda_1=20\text{ 件/日}\\\lambda_2=10\text{ 件/日}\\\lambda_3=15\text{ 件/日}\end{cases}$ $\begin{cases}P_1=20\%\\P_2=10\%\\P_3=20\%\end{cases}$ $\sum_1^3\lambda_iP_i=8$；其它参数 $\begin{cases}a_1=4000\text{ 元/件}\\a_2=2500\text{ 元/件}\\a_3=3500\text{ 元/件}\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_1=10\%\\\alpha_2=10\%\\\alpha_3=10\%\end{cases}$ $\hat{\beta}=3000$ 元/件

| 日逃税总件数 $\gamma_{总}$(件) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日逃税匡算值 $\eta_{总}$(元) | 0 | 300 | 600 | 900 | 1200 | 1500 | 1800 | 2100 | 2400 |
| 相应概率 $\frac{8^k}{k!}e^{-8}$ | 0.03% | 0.27% | 1.07% | 2.86% | 5.73% | 9.16% | 12.21% | 13.96% | 13.96% |
| 日逃税可能区间 | ≤0 | ≤300 | ≤600 | ≤900 | ≤1200 | ≤1500 | ≤1800 | ≤2100 | ≤2400 |
| 相应概率 | 0.03% | 0.3% | 1.37% | 4.43% | 9.96% | 19.12% | 31.33% | 45.29% | 59.25% |

| 日逃税总件数 $\gamma_{总}$(件) | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | >16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日逃税匡算值 $\eta_{总}$(元) | 2700 | 3000 | 3300 | 3600 | 3900 | 4200 | 4500 | 4800 | >4800 |
| 相应概率 $\frac{8^k}{k!}e^{-8}$ | 12.41% | 9.93% | 7.22% | 4.81% | 2.96% | 1.69% | 0.90% | 0.45% | 0.38% |
| 日逃税可能区间 | ≤2700 | ≤3000 | ≤3300 | ≤3600 | ≤3900 | ≤4200 | ≤4500 | ≤4800 | ε>4800 |
| 相应概率 | 71.66% | 81.57% | 88.81% | 93.62% | 96.58% | 98.27% | 99.17% | 99.62% | 100% |

## 四、结论与说明

本文建立了商家逃税额度之复合泊淞流匡算模式，经过理论与实例分析，不难得出以下结论：

(1)模式具有较强通用性。不论是对单一商品专营店，还是对多种商品综合商场；不论是对日逃税额，还是对其它任意时间尺度逃税情况，本文所提出的模式均具有一定的实用价值。

(2)建模成本低廉，建模成本高低很大程度上取决于模式参数估算之难易程度。对于本模式来说，只要税务部门通过适当的抽样方法，合理利用历史资料，对抽样资料进行适当的统计处理，即可估计模式参数$(\lambda_i, P_i)$，$i=\overline{1,n}$。并且理论和事实证明，这种估计是模式参数之最优良估计，因此，本模式构建成本非常低廉。

(3)模式预报相对可靠。本模式是对逃税额进行可能性——概率预报。在预报匡算结果同时，预报其相应可能性，这种预报方式更合乎实际，预报结果更令人信服。

(4)模式具有较好兼容性。众所周知，泊淞流为随机流之最基本流型，人称“最简流”。利用该模式之可加性，对类似经济问题，不论是纵向深入，还是横向拓展，本模式均能较好地实现与其它模式的对接与复合，具有较强兼容性。

勿庸讳言，计量模型源于生活，是经济实践的理论概括和抽象，因此，模式建立不得已要作出一些数字假设，这些假定条件与实际状况吻合与否，接近程度怎样，决定着模式的可靠性，影响着预报的准确性。总的来说，本文之“纳税率”设定，泊淞流型三性假设，以及多种商品商情独立性假设，直观上显而易见，理论上本文仅作初步探讨，具体细节正在进一步完善之中，有关实证分析，我们将另外撰文详述。

(夏国忠系上海财经大学统计系博士生，
施锡铨系上海财经大学统计系教授，单位邮编为200433)