

# 有政府的动态资产定价模型\*

徐爽

(北京大学光华管理学院,北京 100871)

**摘要:**文章建立了一个有政府的动态资产定价模型。政府被模型化为具有垄断力量的市场参与者,它可以利用自己的税收和交易行为影响市场。我们求解了一个政府先行,私人跟随的均衡,得到了一个资产定价的双因子(总消费因子和税收因子)模型。文章证明:资产的超额收益不但取决于与总消费的相关性,还受与政府税收相关性的影响;资本市场的波动行为依赖于税收的随机模式。我们的模型预言,在一个政府作用比较大的经济体里,如果忽略政府的作用,单因子的 ICAPM 可能低估均衡的股权超额收益。同没有政府的经济相比,有政府经济中风险资产的波动率会更高。分析还表明:在动态资产定价模型中引入政府行为是可能的。

**关键词:**资产定价;政府;因子定价模型

**中图分类号:**F830.9 **文献标识码:**A **文章编号:**1001-9952(2005)08-0076-13

## 一、引言

在连续时间金融模型中引入政府是一件具有重要理论意义和挑战性的工作。本文所作的研究则是在这一方向上的一次尝试。我们将建立一个包含政府的动态一般均衡模型。有政府的模型的难点在于设定合理的政府目标函数及其与市场间相互作用的途径。政府究竟是什么,和普通的市场参与者有什么不同,这种不同又如何资本市场表现?对这些问题的恰当处理是建模成功的关键。我们的模型让政府直接成为市场的参与者。这么做一来是能捕捉到政府也有跨期配置资产的需求,二来也比较容易融入连续时间金融模型中。该经济的参照系是标准的竞争性跨期均衡模型,比如, Merton<sup>[11]</sup>, Lucas<sup>[13]</sup> 和 Huang<sup>[2]</sup> 等。我们显示的模型化政府的目标函数和约束以及和市场相互作用的方式。政府被定义为可以对私人部门征税的市场参与者,在每一时刻,政府可以从私人部门的禀赋中取走一部分。政府参与市场的方式不同于普通的投资者,政府具有市场力量,能够对市场价格施加影响。政府的策略被抽象为政府的消费路径和税收过程。我们将考察政府的税收等政策对资本市场均衡的

收稿日期:2005-04-19

作者简介:徐爽(1978—),男,吉林长春人,北京大学光华管理学院博士生。

影响,侧重分析引入政府后,利率和风险升水以及整体市场波动的变化。

在我们的模型中,政府不同于私人部门之处在于税收和参与市场的方式。政府在经济中具有特殊性,它能够用自己的力量对证券市场施加影响。我们考虑一种政府影响市场的途径:政府通过参与市场交易的方式对市场施加影响,并能够预计到自己对市场的影响。更恰当地说,我们把政府作为一个拥有市场力量的参与者加入市场。在资产定价的文献中,考虑市场势力问题的非常少,Lindenberg<sup>[10]</sup>在两期CAPM框架内引入了垄断者,Suleyman<sup>[14]</sup>考虑了连续时间的情形。但是他们得到的ICAPM却基于不可观测的因子,这给模型的实证检验造成了困难。本文通过引入政府得到了可检验的模型。在其他方面,本文的设定和标准的连续时间金融模型是完全相同的。我们的模型设定政府具有与普通市场参与者相同的目标函数。政府也进行消费并追求其效用最大,但是,这些消费应该被广义地理解,它们可以是政府的公共支出等等。

本文接下来的安排如下:在第二部分给出了我们模型的一般结构,并定义了我们要讨论的均衡概念。在第三部分,我们初步分析一般情形下均衡的性质,得到了关于有政府经济的一个福利性质(在我们模型的语境下)和一个双因子(总消费因子和税收因子)的定价模型。在第四部分,我们施加更多的具体结构,讨论CRRRA效用函数与一种风险资产的情形,讨论的主要问题仍然是均衡的状态价格密度决定和市场的波动率等。第五部分简要地总结了我们的分析结论。

## 二、假设和模型

### (一)假设

我们考虑一个有限水平的动态交换经济。首先,经济中有很多相同的私人参与者,这些人可以用一个代表性消费者来代表。他们的行为和标准的模型完全相同,是经济中的价格接受者。政府的目标和私人参与者没有什么不同,被设定为最大化其任期的总效用。我们模型只考虑消费带来的效用,而不考虑更复杂的效用形式。为了突出政府的不同之处,我们把政府设定为一个垄断者。由于政府的特殊地位,它可以利用自己的行为策略地影响市场。虽然政府对市场的影响是复杂的,途径也非常多,至少我们的模型表明在连续时间金融模型中引入政府是可能的。

我们考虑一个类似于政府先行,私人跟随的垄断竞争模型。政府的策略被抽象为其消费路径,其禀赋来源于税收。我们的模型可以形式化地表述如下。如不加特别说明,下标 $a$ 对应的是私人个体,而下标 $g$ 对应的是政府。

假设1:经济中有一种无风险资产,无风险资产的价格过程可以表述为: $dB=r(t)Bdt$ 。其中, $r(t)$ 代表瞬时的无风险利率,其未必是常数,可以是一个

可料的随机过程。

假设 2: 经济中存在  $N=d$  个状态权益(可以理解为股票)市场, 私人和政府都可以购买这些状态权益。每种权益的净供给为 1, 这个条件意味着每种资产大额市值恰好为其价格。这些权益在特定时点的支付将依赖于自然状态的实现, 这些资产的价格过程  $S(t)$  可以被描述为:

$$\frac{dS^i}{S^i} = \mu^i dt + \sigma^i dw \quad i=1, \dots, N$$

向量  $\mu$  和矩阵  $\sigma$  分别用来描述漂移和扩散, 它们可以是随机过程。  $w(t)$  是  $d$  维的标准布朗运动, 是该经济的不确定性来源。

这样, 我们的模型一共有  $N+1$  个维度, 它们是  $N$  个布朗运动和时间维度。而我们的模型恰好有  $N+1$  种资产, 它们是无风险资产和状态权益。这样, 不确定性维度和资产数目相等, 我们考虑的市场模型实际上是动态完备的。关于此的经典讨论是 Duffie-Huang<sup>[6]</sup>。

假设 3: 经济中的参与者是代表性个体和政府, 其目标函数可以分别表示为:

$$E \int_0^T U_{(a,g)} [C_{(a,g)}(t)] dt$$

其中,  $E$  是基于当期所有可得信息的期望算子, 我们的模型不考虑信息非对称的问题, 政府和个人基于相同的信息形成自己的预期。  $C_{(a,g)}(t)$  代表个体与政府在  $t$  时刻的瞬时消费。  $U[C_{(a,g)}(t)]$  是单调增和严格凹的效用函数。时间偏好率隐含在效用函数中。代表性个体是价格接受者; 政府是一个非价格接受者, 它要把自己对均衡价格的影响事先计算在内。

假设 4: 经济中的总禀赋过程  $\delta$  由外生的过程给出:  $d\delta = \mu_\delta dt + \sigma_\delta dw$ 。

假设 5: 政府可以对私人部门的禀赋征税, 比例税率为  $\tau(t)$ , 它可以是一个随机过程  $d\tau = \mu_\tau dt + \sigma_\tau dw$ ,  $\tau < 0$  表示政府对私人进行补贴。  $\mu_\tau, \sigma_\tau$  不一定是常数, 要适当选取以便  $\tau < 1$ 。这在模型化利率过程的时候经常遇到。假定税收为随机过程是出于一般化的考虑, 后面我们会考虑税率为常数的情形。

这样联合假设 4, 我们有  $\delta_g(t) = \tau\delta$ ,  $\delta_a(t) = (1-\tau)\delta$ , 我们的模型不考虑最优税收的问题, 视该税率过程为外生给定。当然, 我们可以考虑对  $\tau$  的一些比较静态分析结果。

假设 6: 除了政府具有市场力量之外, 市场是完美的。这包括允许卖空, 没有交易成本和交易税, 没有违约风险, 借贷利率相同等假设。还有, 市场在每一时刻动态开放并出清, 交易瞬时发生在均衡价格, 也即市场是动态均衡的。

## (二) 模型

决策问题被抽象为选择每一时间的投资组合和消费水平以最大化期间效用。根据 Meron<sup>[11]</sup>, 决策者的财富过程  $X(t)$  可以用如下的随机微分方程表示:

$$dX = rXdt + \delta(t)dt + Cdt + \pi[(\mu - r)dt + \sigma dw]$$

该方程无论对政府还是私人都成立,我们省略了下标。其中: $C$ 是瞬时消费, $\pi$ 是一个价值向量,表示投资在每种资产上的价值。个体或政府要选择最优的投资组合 $\pi^*(t)$ 和消费路径 $C^*(t)$ 以实现其期间消费效用最大。我们把该问题表示如下:

$$\max E \int_0^T U_{(a,g)} [C_{(a,g)}(t)] dt$$

$$S. t. dX = rXdt + \delta(t)dt - Cdt + \pi[(\mu - r)dt + \sigma dw]$$

该问题可以用动态规划的方法求解,但由于要考虑关于值函数的高阶非线性偏微分方程,非常难以求解。尤其是我们的问题要考虑具有市场力量的政府的优化问题,将更加复杂。

根据 Cox 和 Huang<sup>[7]</sup>,我们将采用鞅方法求解个体以及政府的优化问题。在鞅方法的框架下,个体的优化问题被分解为两步:消费问题和投资组合问题。其基本思路是:无套利条件意味着状态价格的存在,该状态价格就惟一决定了个体一生消费的财富约束。这样,给定该财富约束,就可以先求解出个体一生的最优消费问题。而由于我们考虑的是完备市场,在完备市场内,任何一个适应的消费过程都可以用一个自融资的交易策略来复制,该交易策略可以用鞅表示定理求出,而该交易策略就是我们寻找的最优投资组合。总之,状态价格密度过程是现代金融的最核心结论,有了状态价格密度,无论是资产定价问题,还是最优投资组合问题,都变得非常直观。我们将直接引入如下的状态价格密度过程,而不考虑其具体推演过程,可以参考 Duffie<sup>[5]</sup>, Karatzas-Shreve<sup>[8]</sup>。

$$\frac{dH}{H} = -(r dt + \theta dw)$$

其中, $H(0) = 1$ , $\theta$ 是风险的价格向量, $\sigma\theta = \mu - r$ ,当只有一种风险资产时, $\theta$ 就变成了夏普比。 $H(t, \bar{\omega})$ 是该经济的 Arrow-Debreu 状态价格,它给出了时间一状态权益的价格,在该状态价格的作用下,任何自融资的财富过程都变成了鞅。给定该状态价格密度过程,一个一般的消费问题表述为:

$$\max E \int_0^T U[C(t)] dt$$

$$S. t. E \int_0^T H(t)C(t) dt \leq E \int_0^T H(t)\delta(t) dt$$

约束条件的含义是直观的:消费的总价值不能超过禀赋的总价值。求出最优消费过程后,就可以应用鞅表示定理求出为该消费过程融资的投资组合过程。

私人 and 政府在每期进行消费并调整自己的投资组合,市场在每一时刻保持均衡。在参与者选取了最优的消费投资策略的前提下,市场均衡被定义为消费品市场,风险资产市场和借贷市场分别出清,表述如下:

定义:均衡由如下三个方程定义:

$$C_a + C_g = \delta, \pi_a + \pi_g = S_t, \pi_a + \pi_g = X_a + X_g$$

第一个方程为产品市场出清条件,第二个为风险资产市场的均衡条件,第三个表明无风险资产的总供给为 0。

### 三、一般情形

我们先考虑一般的理论框架。在不对效用函数做出特别假设的情形下,我们先求解经济的均衡,并初步讨论经济的性质,推导一个因子模型。随后,我们将考虑 CRRA 的效用函数,并对均衡解进行深入分析。我们求解的方法是:先找到私人 and 市场的反应函数,然后把该反应函数作为政府问题的约束条件之一,再求解政府的最优化问题,最后,应用市场出清条件完成该模型。

评论 1:我们的模型中政府具有市场力量,它先行动。这使得该模型相当于微观经济学中的政府先行,私人跟随的不完全竞争模型。该类模型一般对应于子博弈完美纳什均衡。我们不采用博弈论的概念,但是我们的求解方法是类似的:逆向归纳法。

#### (一)私人的优化问题和反映函数

我们对该模型的求解将从攻击私人的优化问题入手。在我们的框架下,私人的消费问题表述为问题 1:

$$\max E \int_0^T U_a[C_a(t)] dt$$

$$s. t. E \int_0^T H(t)C_a(t) dt \leq E \int_0^T (1 - \tau) H(t)\delta(t) dt$$

问题 1 是一个简单的静态优化问题,容易求解,构建拉格朗日函数:

$$L_a = E \int_0^T \left\{ U_a[C_a(t)] + \lambda_a [(1 - \tau) H(t)\delta(t) - H(t)C_a(t)] \right\} dt$$

消费的一阶条件是:  $U'_a(t) = \lambda_a H(t)$ , 这相当于变分法中的 Euler 方程, 该一阶条件对任意的时间和状态对  $(t, \bar{\omega})$  成立。该方程是我们熟知的一个条件,它要求消费的边际效用和其边际成本相等。把一阶条件和预算约束结合在一起,我们就可以求出最优的消费过程  $C_a(t)$  和财富的影子价格  $\lambda_a$ 。  $C_a(t)$  应该是状态价格密度和个体禀赋的函数。因为个体禀赋是外生给定的,我们有如下的私人消费和状态价格的对应关系:  $C_a(t) = C_a(H(t))$ 。由于在每一时刻,市场必须出清,经济的总禀赋是有限的,政府的消费行为必将影响到私人部门的消费量,这将反过来通过方程产品市场的均衡影响当期的状态价格。这意味着政府在市场上的交易行为和其消费行为不是独立的,政府必须在高消费和低的购买价格之间权衡。这个过程通过均衡条件  $C_a + C_g = \delta$  表现出来,这相当于在不完全竞争模型中,先行者所面临的剩余需求曲线。经济均衡和私人部门的优化条件共同决定了政府的约束条件。

联立一阶条件和产品市场的均衡条件,政府消费对状态价格的影响直接由以下方程直接给出:

$$U'_a(\delta - C_g) = \lambda_a H(t)$$

该方程为市场对政府行动的反应函数,是政府进行消费决策的约束条件之一。

## (二)政府的优化问题

继续逆向归纳法的逻辑,现在转向政府的决策问题。对应地,我们分两步求解政府的问题。政府的消费问题为选择  $C_g(t)$  最大化期间效用,其鞅方法表述为问题 2:

$$\begin{aligned} & \max E \int_0^T U_g[C_g(t)] dt \\ & \text{S. t. } U'_a(\delta - C_g) = \lambda_a H(t) \\ & \text{S. t. } E \int_0^T H(t) C_g(t) dt \leq E \int_0^T \tau H(t) \delta(t) dt \end{aligned}$$

用同样的方法,先用约束条件 1 消去状态价格,并构建拉格朗日函数:

$$L_g = E \int_0^T \left\{ U_g[C_g(t)] + \frac{\lambda_g}{\lambda_a} U'_a(\delta - C_g) [\tau \delta(t) - C_g(t)] \right\} dt$$

$$\text{一阶条件: } U'_g[C_g(t)] = \frac{\lambda_g}{\lambda_a} [U'_a(\delta - C_g) + U''_a(\delta - C_g) [\tau \delta(t) - C_g(t)]]$$

$C_g(t) - \tau \delta(t)$  是政府消费超过禀赋的部分,这要从市场上去购买。我们在垄断厂商的定价问题里已经见过类似的方程。它表明政府不但要考虑边际消费的价格问题,还要权衡多消费引起的价格增加所导致总消费成本的增加。

我们暂时假定经济的均衡存在。私人 and 政府的一阶条件、预算约束以及市场的出清条件一起决定了经济的全局均衡。任何结论都将通过讨论他们并施加特定的结构得到。我们先给出该经济的一个简单的福利性质。

定理 1: 如果经济中的个人是风险厌恶的,那么只要政府在某个时间状态进入了市场交易,那么经济就不是 Pareto 有效率的。

证明: 运用反证法证明。假如该经济是 Pareto 的。福利经济学第二定理意味着存在某个价格  $H(t, \bar{\omega})$  ( $\bar{\omega}$  表示状态), 使得对于任意个体和任意的  $(t_1, \bar{\omega}_1), (t_2, \bar{\omega}_2) \in [0, T] \times \Omega$  满足如下的方程也就是:

$$\frac{U'_g(1)}{U'_a(1)} = \frac{U'_g(2)}{U'_a(2)}$$

在政府的一阶条件两边同除以  $U'[\delta(t) - C_g(t)]$ , 并省略掉自变量, 我们得到:

$$\frac{U'_g}{U'_a} = \frac{\lambda_g}{\lambda_a} \left\{ 1 + \frac{U''_a}{U'_a} [\tau \delta(t) - C_g(t)] \right\}$$

由于该方程对于任意的时间状态成立, 而且  $\lambda_g$  和  $\lambda_a$  是常数, 因此有, 对于不同的时间状态对  $(t_1, \bar{\omega}_1)$  和时间状态对  $(t_2, \bar{\omega}_2)$ , 我们有:

$$\frac{U'_g(1)}{U'_a(1) \left\{ 1 + \frac{U''_a}{U'_a} [\tau\delta(t) - C_g(t)] \right\}_1} = \frac{U'_g(2)}{U'_a(2) \left\{ 1 + \frac{U''_a}{U'_a} [\tau\delta(t) - C_g(t)] \right\}_2}$$

应用 Pareto 条件, 我们有:

$$\frac{U''_a}{U'_a} [\tau\delta(t) - C_g(t)]_1 = \frac{U''_a}{U'_a} [\tau\delta(t) - C_g(t)]_2$$

也就是, 对任意的  $(t, \bar{\omega})$ , 下面式子成立:

$$\frac{U''_a}{U'_a} [C_g(t) - \tau\delta(t)] = \varphi$$

这里  $\varphi$  是一个常数。根据风险厌恶假设,  $U'' < 0$ , 同时, 如果存在某个时间状态, 政府的购买量不为零, 因此  $\varphi \neq 0$ , 这又意味着政府在所有的时间状态都要进入市场交易。从上面的方程我们得到:

$$H[C_g(t) - \tau\delta(t)] = \varphi H \frac{U'_a}{U''_a}$$

把该式对所有的时间和状态积分, 有:

$$E \int_0^T \left( \frac{\varphi}{\lambda_a} \frac{(U'_a)^2}{U''_a} \right) dt = E \int_0^T H[C_g(t) - \tau\delta(t)] dt = 0$$

这里应用了私人的一阶条件和政府的预算约束条件。而由于  $U'$  和  $\varphi$  都不为零, 这是不可能的, 因此定理成立, 证明完毕。

该定理给出了有政府的动态经济均衡模型的一个福利性质。这个结论是非常自然的。因为政府一旦决定进入消费品市场时, 不但考虑价格因素, 还要考虑自己的购买对价格造成的影响, 这种外部性的存在使得政府进入市场边际成本不仅仅有价格的部分, 还包括价格变动所带来的总成本变化。结果是政府和个体之间面临的边际替代率是不同的, 存在不影响一方而改善另外一方的机会。

虽然我们讨论最优税收问题, 但也可以做一简短评论。从上面的讨论过程可以看出, 如果外生给定的税率适当地选取, 比如  $\tau^*$  将能够使得政府每期不必进入市场交易, 此时  $C_g = \tau^* \delta$ , 那么此时显然有:

$$\frac{U'_g(1)}{U'_a(1)} = \frac{U'_g(2)}{U'_a(2)}$$

经济将处于 Pareto 状态。如果政府能够按照自己的支出情况进行相机的税收, 使得不必进入资产市场进行交易, 那么经济将进入 Pareto 状态。因为, 此时政府在每期的净购买量为零, 政府不会利用自己的力量影响证券市场价格, 政府的边际替代率将等于状态价格之比, 经济不存在配置扭曲。

### (三) 均衡利率和风险溢价

在求解了私人 and 政府的最优问题之后, 我们来考察经济的均衡。关于跨期资本资产定价模型, Merton<sup>[11]</sup> 给出了一个双因子的 ICAPM 方程, 这些因

子反应了短期的市场组合以及投资机会集的变化。Breed<sup>[1]</sup>则给出了一个基于消费的单因子的 ICAPM 方程,又叫 CCAPM。但这些方程都是在假设没有政府,所有市场是完全竞争的情形下得到的。由于我们的模型中存在具有市场力量的政府,经济均衡会发生改变。

寻找均衡对资产价格施加的限制需要充分利用个体的最优消费和市场均衡条件。对政府优化问题的一阶条件两边应用 Ito 引理,我们能够得到  $C_g$  的过程,求出  $C_g$  的漂移项和扩散项。然后再对产品市场的均衡条件应用 Ito 引理,我们即可知道均衡对状态价格施加的限制,由此得到均衡的利率和风险溢价过程。

这里和竞争性经济的不同在于:均衡的利率和风险溢价不但受经济的总消费影响,还受政府税收影响。政府税收的波动直接影响到经济的无风险利率和风险溢价。风险溢价由下面定理给出,无风险利率过程的给出此处省略,感兴趣的读者可向作者索取。

定理 2:均衡时风险溢价满足如下的因子模型:

$$\mu - r_1 = \alpha_1 \text{Cov}\left(\frac{d\delta}{\delta}, \frac{dS}{S}\right) + \alpha_2 \text{Cov}\left(\frac{d\tau}{\tau}, \frac{dS}{S}\right)$$

证明:限于篇幅,请感兴趣读者参见作者主页上的原文。基本思路是对一阶条件和均衡条件应用 Ito 引理。

上面的方程是我们得到两因子的资产定价模型。我们知道在完全竞争模型中,风险升水一般只由该资产与经济总禀赋的协方差决定。不同的是,我们的模型中风险升水由两部分构成:总禀赋的风险和税率的风险。如果没有政府  $\tau=0$ ,那么我们的模型则回到了 Breed<sup>[1]</sup> 的状态,变成了单因子的 CCAPM。还有一种情形下,我们的模型也将退化成单因子的 CCAPM。在我们的模型中,政府的税收相当于一个状态变量,它影响了个人的投资机会集,个人不但要持有短期市场组合,还要持有另外一个基金以对冲政府税收的变化。这非常类似于 Merton 的结论,那里当存在其他状态变量的时候,个体持有另外一只基金以对冲投资机会集的变化。需要指出的是,因为我们模型中的两个状态变量总消费和税收都是可直接观测的,所以我们的结论可以直接被检验。

我们始终假定政府的税率是一个随机过程,这使得经济中多了一个独立于个体禀赋的状态变量。如果税率为常数,那么政府的收入和总消费是完全线性相关的,我们双因子模型也将退化成单因子模型。这相当于如下的特例:政府的收入完全由常数税率  $\tau$  产生,税收的比例是固定的。此时,政府的禀赋和私人收入是完全线性相关的。 $\tau(t) \equiv \tau, \forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ , 根据定理 2, 让  $\alpha_\tau = 0$ , 我们将得到  $\mu - r_1 = \alpha_1 \text{Cov}\left(\frac{d\delta}{\delta}, \frac{dS}{S}\right)$ , 我们不打算就一般情形讨论投



资策略和市场的波动率。对这些问题的讨论将结合 CRRA 进行。

#### 四、CRRA 效用函数与单风险资产

为了深入分析,同时为了简单起见,我们将考虑一种特殊的情形:政府和个体的效用函数为 CRRA 的形式也就是常数绝对风险规避系数的效用函数,这个效用函数被广泛适用于资产定价的文献当中,而且对于 CRRA 效用函数的情形,我们的讨论比较容易进行。也即我们做如下假设:

假设 7:政府和私人的效用函数由如下方程给出,忽略时间偏好,假设私人 and 政府的相对风险规避系数相同,  $\gamma=1$ , 则对应数效用函数的情形:

$$U = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

##### (一)消费和状态价格

CRRA 效用下的最优消费和状态价格过程由如下定理给出。

定理 3:如果政府和个人的效用函数都为 CRRA 的形式,那么最优的税收和禀赋对最优消费过程的影响是可以分离的,存在一个关于税收过程和经济中风险规避系数的充分统计量  $\varphi$  使得:  $C_a(t) = \phi\delta$ ,  $C_g(t) = (1-\phi)\delta$ , 均衡的状态价格过程满足为:  $H\lambda_a = [\phi\delta]^{-\gamma}$ , 其中,  $\phi(\tau)$  为如下代数方程的解:

$$\frac{\phi^{\gamma+1}}{(1-\phi)^\gamma} = \frac{\lambda_g}{\lambda_a} [\phi + \gamma(1-\phi-\tau)]$$

证明:把 CRRA 的效用函数代入政府最优化的一阶条件并进行整理得到:

$$\frac{C_a^{\gamma+1}}{C_g^\gamma} = \frac{\lambda_g}{\lambda_a} \{ C_a - \gamma[\tau\delta(t) - C_g(t)] \}$$

这个方程关于  $C_a$ ,  $C_g$  和  $\delta$  是齐次的,结合均衡条件,我们猜解的形式为  $C_a(t) = \phi\delta$ ,  $C_g(t) = (1-\phi)\delta$ , 这里  $\phi(\tau)$  只是税收的函数。因为  $\delta(t) > 0$ , 代入上面方程得到关于  $\phi$  的方程:

$$\frac{\lambda_a \phi^{\gamma+1}}{\lambda_g (1-\phi)^\gamma} = [\phi + \gamma(1-\phi-\tau)]$$

该方程的参数完全由  $\tau$  决定,其解  $\phi$  必然也只是  $\tau$  的函数,这验证了我们前面猜测的合理性。把得到的  $C_a$  代入私人的一阶条件,得到状态价格密度的表达式。

$0 < \tau < 1$  时解的存在性和惟一性:我们只给一个简单的说明。我们可以先定义两个函数:  $L(\phi) = \frac{\lambda_a \phi^{\gamma+1}}{\lambda_g (1-\phi)^\gamma}$ ,  $R(\phi) = [\phi + \gamma(1-\phi-\tau)]$ 。  $L(\phi)$  是一个定义在  $[0, 1)$  上的单调增函数。  $L(0) = 0$ ,  $\lim_{\phi \rightarrow 1} L(\phi) = +\infty$ ,  $R(\phi)$  是关于在  $[0, 1)$  上的线性减函数。  $R(0) = \gamma(1-\tau)$ ,  $R(1) = 1-\gamma\tau$  是一个有限的数。这意味着曲线  $L(\phi)$  和  $R(\phi)$  在  $[0, 1)$  上必有交点。再由这两个函数的单调性,

其交点必然是惟一的。证明完毕。

这样,在 CRRA 效用形式下,私人 and 政府都将消费总禀赋的一个比例,而该比例完全由税收过程决定。有意思的是,一般来讲, $1 - \phi(t) \neq \tau$ ,因此政府总要进入消费品市场并进行购买,那么根据命题 1,我们知道此时的经济一定不是 Pareto 最优的。此时,Pareto 效率要求政府的税率是某个常数过程。

### (二)均衡利率和风险升水

如果税收是一个很一般的随机过程,很难继续用分析的办法得到合意的性质。在求助于数值解法之前,我们先对税收过程施加一定的结构,以便得到具体的结论。我们不把假设施加在税收过程上,相反,根据以上讨论,在 CRRA 效用的情形下, $\phi(\tau)$ 变成了  $\tau$  和风险规避系数的充分统计量, $\tau$  对模型的任何影响都会通过  $\phi(\tau)$  表现出来。此时,一个方便的做法是直接假设  $\phi(\tau)$  的运动形式。

假设 8:假设  $\phi(\tau)$  服从如下的随机过程,也即存在函数  $\mu(t)$  和  $\sigma(t)$  使得:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \mu_{\phi} dt + \sigma_{\phi} dw$$

$\phi(\tau)$  由前面的代数方程定义,我们省略了自变量  $t$ 。注意,我们可以从税收过程得到  $\phi(\tau)$  的运动性质。同时,为了对称起见,我们把假设 4 中的分红过程写成分红率的形式,也就是我们假设分红过程为:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \mu_{\delta}(t) dt + \sigma_{\delta}(t) dw$$

定理 4:一旦给定充分统计量  $\phi(\tau)$  的过程如上所示,状态价格密度的显示解为无风险利率和风险升水分别为:

$$r = \gamma \left( \mu_{\phi} + \mu_{\delta} - \frac{1}{2} \sigma_{\phi}^2 - \frac{1}{2} \sigma_{\delta}^2 \right) - \frac{1}{2} \gamma^2 (\sigma_{\phi} + \sigma_{\delta})^2$$

$$\mu - r1 = \gamma \text{Cov} \left( \frac{d\delta}{\delta}, \frac{dS}{S} \right) + \gamma \text{Cov} \left( \frac{d\tau}{\tau}, \frac{dS}{S} \right)$$

这样一个例子无非是说明  $\phi(\tau)$  充当了税收过程,风险规避等信息的充分统计量。此时, $\phi$  和  $\delta$  的统计性质完全决定了经济的均衡利率和风险升水。从理论上讲,税收和该充分统计量的关系比较复杂;在实证检验中,这要求我们从历史的总消费和私人部门的消费中分离出该充分统计量。而且该定理也告诉我们,均衡的状态价格密度过程服从几何布朗运动的一个充分条件是  $\phi$  和  $\delta$  服从几何布朗运动。

### (三)投资策略和市场波动率

前面提到,鞅方法把投资者的优化问题分解为两步。可是到目前为止,我们只求解了第一步——消费问题,还没有考虑第二步——最优投资策略问题。在这部分,我们继续假设 CRRA 的效用形式,并利用前面得到的充分统计量性质来求解私人 and 政府的最优投资策略。最后,让风险资产市场出清,分析股

票市场的波动情况。

我们引用一个引理,该引理可以在 Cox-Huang<sup>[7]</sup>或者 Karatzas-Shreve<sup>[8]</sup>中找到。该引理大意为:无论是政府还是个人,在任一时点的财富等于未来所有消费的折现。在这一意义上,财富就是一种资本。沿用前文的记号,该引理的形式化表述为:

$$X(t) = \frac{1}{H(t)} E \left[ \int_t^T H(s) C(s) ds \mid I_t \right]$$

这里,  $I_t$  表示在  $t$  时刻所有可获得的信息。我们应用这个引理来求解市场参与者的财富过程。我们先对私人部门的消费过程应用该引理:

$$X_a(t) = \frac{1}{H(t)} E \left[ \int_t^T H(s) C_a(s) ds \mid I_t \right] = \frac{1}{H(t) \lambda_a} E \left[ \int_t^T (\phi \delta)^{1-\gamma} ds \right]$$

其中,第二个等号应用了私人部门的一阶条件。当  $\phi$  和  $\delta$  的漂移和扩散系数都是一般随机过程时,上面积分的显示解很难找到。为了能够计算出最后一个积分,我们需要对  $\phi$  和  $\delta$  的过程做进一步假设。

假设 10:  $\phi$  和  $\delta$  的漂移和扩散系数是常数,也就是  $\phi$  和  $\delta$  服从几何布朗运动。

这样,我们可以直接计算出投资者的财富过程,并由此得出股票的波动率,这些结果包含在如下的定理中。

定理 5: 私人和政府投资在风险资产上的财富数量分别为:

$$\pi_a(t) = \frac{[e^{\beta(T-t)} - 1] \phi \delta (\sigma_\delta + \sigma_\phi)}{\beta \sigma}$$

$$\pi_g(t) = \frac{[e^{\rho(T-t)} - 1] \delta \sigma_\delta}{\rho \sigma} - \frac{[e^{\beta(T-t)} - 1] \phi \delta (\sigma_\delta + \sigma_\phi)}{\beta \sigma}$$

均衡的股票价格波动率为  $S_t \sigma = \frac{[e^{\rho(T-t)} - 1] \delta \sigma_\delta}{\rho}$ 。

证明可以参阅作者网页上的原文,基本思路是:财富过程通过直接积分消费过程得到,价格过程通过积分分红过程得到。这些方程是这部分的中心结论。 $\rho > 0$ ,是取决于税收过程和禀赋过程的参数,可以看出,此时的股票波动率已经不是常数,而是由总消费的波动和税收的波动共同驱动的。同完全竞争性经济相比,这里的波动行为更加复杂。另一方面,税收对波动率的作用完全通过  $\rho$  来表现,对于没有政府的经济,我们知道风险资产的波动率为  $S_t \sigma = (T-t) \delta \sigma_\delta$ ,它完全由禀赋过程决定。直接比较有无政府的波动率,我们知道:在有政府的经济中风险资产的波动率要更高。税收给经济带来了更多的不确定性,在每一时刻,市场参与者需要更多的交易需求以对冲风险,在风险资产总供给不变的情形下,均衡要求更高的风险资产波动率以削减这部分增加的需求。

## 五、结 论

本文提供了一个初步的分析框架,用以在动态资产定价模型中包含政府。把政府作为市场直接参与者引入经济,其合理性还有待证实。垄断性政府的介入使得我们的经济变成一个不完全竞争的经济,分析和求解都变得相当困难。我们就对数效用和特殊的税收过程给出了一个显示解。对于一般情形,可能的途径是求助于数值算法。我们深入分析了政府的引入对经济的利率和风险升水以及股票市场波动率的影响,并得到了一个资产定价的双因子(总消费因子和税收因子)模型。我们证明:和总消费的相关性无法完全解释资产的超额收益,和政府税收的相关性同样影响股权升水。如果确实如此,那么,在一个政府作用比较大的经济体里,如果忽略政府的作用,单因子的 ICAPM 可能低估均衡的股权超额收益。在均衡模型中引入政府行为作为因子变量有助于解决股权升水之谜,更能帮助理解资本市场的波动。

\* 作者感谢光华管理学院的周春生老师和王亚平老师。文中省略的证明可见作者的主页:<http://web.cenet.org.cn/web/longxsh0071/>

## 参考文献:

- [1]Breedeen, Douglas T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 17: 265~296.
- [2]Chi-Fu Huang. An intertemporal general equilibrium asset pricing model: The case of diffusion information[J]. Econometrica, 1987, 55(1): 117~142.
- [3]Darrell Duffie. Stochastic equilibria: Existence, spanning number, and the no expected financial gain from trade' hypothesis[J]. Econometrica, 1986, 54(5): 1161~1184.
- [4]Darrell Duffie, William Zame. The consumption-based capital asset pricing model [J]. Econometrica, 1989, 57(6): 1279~1297.
- [5]Darrell Duffie. Dynamic asset pricing theory[M]. Princeton University Press, 2001.
- [6]Darrell Duffie, Chi-Fu Huang. Implementing arrow-debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities[J]. Econometrica, 1985, 53(6): 1337~1356.
- [7]J Cox C Huang. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 43: 33~83.
- [8]Karatzas Ioannis, Shreve Steven. Methods of mathematical finance[M]. 3rd, 2001, XV, 415.
- [9]Karatzas, Ioannis. Lectures on the Mathematics of Finance[R]. 1997, AMS.
- [10]Lindenberg E. Capital market equilibrium with price affecting institutional investors [R]. TIMS Studies in the Management Sciences, 1979.
- [11]Robert C Merton. An intertemporal capital asset pricing model[J]. Econometrica, 1973, 41(5): 867~887.
- [12]Robert C Merton, G Subrahmanyam. The optimality of a competitive stock market [J].

- The Bell Journal of Economics and Management Science, 1974, 5(1): 145—170.
- [13] Robert E Lucas Jr. Asset prices in an exchange Economy[J]. Journal of Political Economy, 1978, 46(6): 1429~1445.
- [14] Suleyman Basak. Dynamic consumption portfolio choice[R]. London business School, Working Paper Series, 1999.
- [15] Suresh M Sundaresan. Continuous-time methods in finance: A review and an assessment[J]. Journal of Finance, 2000.

## A Dynamic Asset Pricing Model with Government

XU Shuang

(Guanghua School of Management, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** This paper builds a stochastic dynamic asset pricing model with government. The government is modeled as a market participant with monopoly power, who can influence the market by means of tax and transaction. We define the equilibrium concept and solve the equilibrium with CRRA utility function, and obtain a two-factors asset pricing model: tax factor and consumption factor. In this specific form of the general APT (Ross 1976), the excess premium of an asset depends not only on its beta with consumption but also on its beta with tax. A direct implication is that the behavior of the capital market will depend on the behavior of government. Our model tells us: in a market in which government has a big role, the traditional ICAPM tends to underestimate the risk premium of a capital asset. Our analysis shows that it is possible to introduce government into the general equilibrium stochastic asset pricing model and the model can help us to understand the performance of the capital market.

**Key words:** asset pricing; government; APT

(责任编辑 周一叶)