第 31 卷 第 2 期
2005 年 2 月
财经研究
Journal of Finance and Economics
Vol. 31 No. 2
Feb. 2005

违约风险定价理论比较分析

吴恒煜[1]，陈金贤[2]
(1. 中山大学 管理学院，广东 广州 510275；2. 西安交通大学 管理学院，陕西 西安 710049)

摘　要：文章对违约风险文献进行综述，对不同模型的理论基础、主要观点与基本特征进行了比较分析(主要包括结构化模型与约化模型)，最后对模型的优缺点与发展进行了评论。

关键词：结构化模型；约化模型；违约风险定价

中图分类号：F064.1；F224.0　**文献标识码**：A　**文章编号**：1001-9952(2005)02-0134-11

一、引　言

违约风险是债务人在债务到期时，无法或不想还本付息，而使债权人遭受损失的风险。通常在交易对手企业经营状况或财务状况不佳而导致违约甚至破产的情况下发生。关于违约风险定价的研究主要有两种模型：结构化模型与约化模型。在结构化模型中，直接假设公司资产价值的动态过程、资产结构、债务与股权，当公司资产不足以支付债务时，违约发生，公司债务实际上为公司资产的期权。相反，约化模型并不解释公司为什么违约，而是通过外生给定违约率或强度来确定违约过程。本文通过介绍相关的研究文献，分析一些典型的违约风险定价模型，为违约风险定价提供一条研究思路。

二、结构化模型

在 Black 和 Scholes(1973)，Merton(1974)(BSM 模型)的开创性文献中，他们运用期权理论建立了违约风险定价模型，给违约债券定价。BSM 模型的主要观点是公司资产价值与其负债之间的关系，公司股权价值可以看作是执行价格为公司债务账面价值的公司总资产的看涨期权，假定利率为固定常数，违约只发生在债务到期日，利用期权定价理论，得到违约债券价格的封闭

收稿日期：2004-11-28
基金项目：中国博士后科学基金(2004036157)；广东省教育厅人文社会科学研究基金(02SJC790002)；广东省哲学社会科学"十五"规划项目(03/04C2—13)
作者简介：吴恒煜(1970—)，男，广东湛江人，中山大学管理学院博士后流动站研究人员；
陈金贤(1932—)，男，福建福州人，西安交通大学管理学院教授，博士生导师。

解。随后,许多学者扩展了该模型,如 Geske(1 977),Ingersoll(1977),Merton(1977),Jones、Mason 和 Rosenfeld(1984),Franks 和 Torous(1989),Kim、Ramaswamy 和 Sundaresan(1992)等。但是,这些模型仍然有几个缺陷:(1)利率为固定常数;(2)在债务到期日之前不允许发生违约;(3)坚持严格优先规则。接着,Breman 和 Schwartz(1980),Cooper 和 Mello(1991),Shimko、Tejima 和 Deventer(1993)结合 BSM 模型与 Vesi cek 形式的无风险利率模型,假设资产价值与无风险利率相关,建立两要素模型,发展了具有随机利率特点的结构化模型。Black 和 Cox(1976)引入吸引障碍,设置较低的违约障碍边界(阀值),发展了允许到期前违约的模型,但是仍然不能解释信用差价估计偏差问题。Kim、Ramaswamy 和 Sundaresan(1993)把破产触发由原来的资产价值改变为现金流,结合无风险利率的 CIR 模型建立相应模型,当现金流不足以支付利息负债时违约发生。但是,由于模型较复杂,难以得到封闭解。Longstaff 和 Schwarz(1995)同样放松了违约时间和违约边界的限制,引入了在债务期限内任何时点,只要公司资产价值触发某一外部边界,违约就会发生。Briys 和 devarenne(1997)以随机障碍为特征,假设短期利率服从 Gauss 扩散过程,将违约边界推广到随机利率环境下,对 Longstaff-Schwartz模型进行了扩展。模型的另一发展方向是违约触发边界,在许多模型中,这一边界变量是外生的,Leland(1994)引入税收与破产成本内生化违约触发边界,根据优化原则由企业决定在何时宣布破产违约。Leland 和 Toft(1996)扩展该模型并推导出信用差价的期限结构,如同其他模型一样,模型虽然优美,但难以检验。因此,模型越复杂就越接近实际,但是增加随机因素与复杂性,必然增加模型的待估参数。结构化模型一般要求假设:债务发行资产的价值过程、发行资产的资本结构、违约边界(阀值)、违约损失、债务发行的条款与条件、无风险利率过程、无风险利率与资产价值之间的相关性。由于一些模型篇幅太长,这里介绍三个有代表性的模型。

(一)开创性的 Merton 模型。在 Morton(1974)的模型中,金融市场被假设为完全和无摩擦的,交易连续发生,无税收,无交易成本。公司价值与公司的资本结构决策无关,即 Modiglian-Miller 命题成立,股票持有者只有有限责任。假设违约只在到期日 T 才发生,违约发生时间为取值于 T 或∞的随机变量,公司价值的动态变化服从风险中性概率分布的几何布朗运动:$dV_t = rV_t dt + \sigma V_t dW_t$。其中,r 为无风险利率,σ 为公司资产价值的波动率。

如果到期日公司的资产价值 V_T 小于债务的面值 F,就发生违约。即到期日,公司股票持有人的收益为 $E_T = \max(V_T - F, 0)$;债务人的支付为 $\min(V_T, F)$,或可表示为 $F - \max(F - V_T, 0)$。债券价格由下式给出:$Y_t = \exp(-r(T-t))N(d_2) + V_t N(-d_1)$。其中,N(·)为正态分布的累积概率函

数，$d_1=\frac{\log(d)}{\sigma\sqrt{T}}-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$，$d_2=-\frac{\log(d)}{\sigma\sqrt{T}}-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$。

定义准负债率为 $l_0=Fe^{-rT}/V_0$，在无风险利率为常数 r 的条件下有违约风险债务的公司差价为：

$$CS(d,\sigma,T)=-\frac{1}{T}\log[N(h_2)+\frac{1}{l_0}N(h_0)]$$

其中，$h_1=\frac{\log(d)}{\sigma\sqrt{T}}-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$，$h_2=\frac{\log(d)}{-\sigma\sqrt{T}}-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$。

公司差价 CS(d,σ,T)是准负债率 l_0 和资产波动率 σ 的递增函数，实际上，在其他参数一定时，当 l_0 或 σ 越大时，债权由于较高的违约风险而更具有风险。尽管许多理论性的文献已研究了违约风险债券的定价理论，但实证研究表明，Morton(1974)的非随机利率理论不能产生与实际观测相一致的公司差价。而且 Morton(1974)的传统违约风险模型有三个明显缺点：利率期限结构假设为平坦的和确定的、破产触发机制太简单以及运用了严格优先规则。

(二)基于随机利率的 Longstaff 和 Schwartz 模型。基于 Morton(1974)模型在应用上的局限性，Longstaff 和 Schwartz(1995)提出一种新模型，它是 Morton(1974)模型的一种推广与改进，假定利率的动态过程满足 Vesicek(1977)的表达式，资产价值的动态过程满足几何布朗运动：$dV=\mu Vdt+\sigma VdW_v(t)$，$dr=k(\theta-r)dt+\eta dW_r(t)$，$dW_VdW_r=\rho dt$。其中，μ，k，θ，η 为正常数，$W_V$、$W_r$ 为自然概率 Q 下的布朗运动，ρ 为无风险利率与公司资产价值的相关系数。

模型中假定公司存在一个临界值 K，使得公司价值小于该值时，发生财务危机；否则，公司能够继续履行合约中规定的义务。如果 F 是公司债务的面值，当债务生存期内没有发生违约时，在到期日对该未定权益的支付为 F，否则，债券持有者在到期日得到(1−ω)F。有违约风险债券的价值 v(t,T)为：

$$v(t,T)=P(t,T)[G(t,T)+(1-\omega)F(1-G(t,T))]$$

这里 G(t,T)为在(t,T)区间没有违约的概率，在风险中性概率测试 Q^T 下，资产价值和利率的动态过程可表示为：

$$d\ln V=(r-\frac{\sigma^2}{2}-\rho\sigma\eta M(T-t))dt+\sigma d\widetilde{W}_r,\ dr=[\theta-kr-\eta^2M(T-t)]dt+\eta d\widetilde{W}_r,$$

$$M(t)=\frac{1-\exp[1-k(T-t)]}{k}$$

这里 $\widetilde{W}_V\widetilde{W}_r$ 为 Q^T 测度下的布朗运动。

Longstaff 和 Schwartz(1995)得到有违约风险贴现债券的价格由下列表达式给出：

$$P(X,r,T)=D(r,T)-wD(r,T)Q(X,r,T)$$

这里 D(r,T)为满足 Vasicek 利率模型的无风险贴现债券的价格，$Q(X, r, T, n)=\sum_{i=1}^{n} q_i$，$q_1=N(a_1)$，$q_i=N(a_i)-\sum_{j=1}^{i-1} q_i N(b_{ij})$，$i=2,3,\cdots\cdots,n$，$a_i=\dfrac{-\ln X-M(iT/n,T)}{\sqrt{S(iT/n)-S(jT/n)}}$，$b_{ij}=\dfrac{M(jT/n)-M(iT/n,T)}{\sqrt{S(iT/n)-S(jT/n)}}$

$$M(t,T)=\left(\frac{\alpha-\rho\sigma\eta}{\beta}-\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\left(\frac{\rho\sigma\eta}{\beta^2}+\frac{\eta^2}{2\beta^3}\right)\exp(-\beta_t)(\exp(\beta_t)-1)+\left(\frac{r}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\eta^2}{2\beta^2}\right)(1-\exp(-\beta_t))-\left(\frac{\eta^2}{2\beta^3}\right)\exp(\beta T)(1-\exp(-\beta_t))$$

$$S(t)=\left(\frac{\rho\sigma\eta}{\beta}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\sigma^2\right)t-\left(\frac{\rho\sigma\eta}{\beta^2}+\frac{2\eta^2}{\beta^3}\right)(1-\exp(-\beta_t))+\left(\frac{\eta^2}{2\beta^3}\right)(1-\exp(-2\beta_t))$$

Q(X,r,T)是当 $n\to\infty$时，Q(X,r,T,n)的极限，N(·)为累积正态分布函数。

然而，这一模型有明显的缺点，即定价方程不能保证当公司债券到期时，对债券持有者的支付不大于违约时公司的价值。事实上，公司可能在债券到期日发现自己还有偿付能力，尽管如此，资产已不足以偿付债券的面值。而且可以验证，Longstaff 和 Schwartz(1995)模型的封闭形式解在违约障碍趋于 0 时，有违约风险债券的价格收敛到无违约风险零息债券的价格。然而，根据 Merton 的模型，它应该收敛到可能在到期日违约的风险公司债券的价格。

（三）基于随机障碍重组边界的 Briys-de Varenne 模型。Briys 和 de Varenne(1997)[4]模型的主要目标是完善上述模型的不足，该模型定义违约障碍为一固定值，它以无风险利率贴现到有违约风险公司债券的到期日。只要越过这个障碍，债券持有者就接受剩余资产的一个外生确定的部分。因此，严格优先规则的偏离就容易处理。该模型以随机障碍为特征，避免了 Longstaff 和 Schwartz(1995)模型中固定违约界限的局限。而且，它保证了债券持有者在违约时不可能得到比公司价值更高的支付。

Briys 和 de Varenne(1997)模型假设短期利率服从 Gauss 扩散过程，其波动率是一个确定的函数，r_t 在风险中性测度下由确定的函数 a(t)，b(t)σ(t)表示的随机过程：$dr_t=a(t)(b(t)-r_t)dt+\sigma(t)dZ_t$。在上面利率的假定条件下，在时刻 T 到期的无违约风险贴现债券在时刻 t 的价格 P(t,T)由下列随机微分方程给出：

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}=r_t dt-\sigma_P(t,T)dZ_t$$

其中：$\sigma_P(t,T)=\sigma(t)\int_t^T \exp\left(-\int_t^u a(s)ds\right)du$

在风险中性概率测度下，公司资产的价值为：

$$\frac{dA_t}{A_t}=r_t dt+\sigma_A(\rho dZ_t+\sqrt{1-\rho^2}dW_t)$$

这里，σ_A 代表资产收益率的瞬间标准差，ρ 代表无风险利率和公司资产间的相关系数，W_t 是独立于 Z_t 的标准布朗运动。

债券持有者被假定为受到一个安全约定保护，使他们被允许触发提前破产。v(t)表示时刻 t 发生破产的临界水平，只要公司资产的价值降到 v(t)以下，这一安全约定就会保护债券持有者，使破产或清算被迫执行，假定 v(t)是外生规定的，有下列形式：$v(t)=\alpha FP(t,T)$。其中，F 表示公式债券的面值，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。

当破产发生，即当 A_t 第一次越过 v(t)时，公司的债券持有者得到外生规定的公司资产的份额，令 $f_1(0\leqslant f_1\leqslant1)$表示当违约发生在到期日之前时这一份额，$f_2(0\leqslant f_2\leqslant1)$表示当违约发生在到期日时的这一份额。在极端情形下，$f_1=f_2=1$，严格优先规则被坚持，而股票持有者什么也没得到。

在 t=0 时，公司发行两类证券：零息票债券(到期日 T，面值 F)的单一同质债权以及剩余权益(股权)，Briys 和 de Varenne(1997)解出有违约风险贴现债券的价格 D_t 为：

$$D_t=FP(t,T)[1-P_E(l_t)+\frac{q_t}{l_t}P_E\left(\frac{q_t^2}{l_t}\right)-(1-f_1)\frac{1}{l_t}(N(-d_3)+q_tN(-d_4))-(1-f_2)\frac{1}{l_1}(N(d_3)-N(d_1)+q_t(N(d_4)-N(d_6))]$$

公司差价为：

$$S=-\frac{1}{T}\ln[1-P_E(l_0,l)+P_E(q_0,\frac{l_0}{q_0})-(1-f_1)l(N(-d_3)+\frac{N(-d_4)}{q_0})-(1-f_2)l_0(N(d_3)-N(d_1)+\frac{N(d_4)-N(d_6)}{q_0})]$$

其中，$l_t=\frac{FP(t,T)}{A_t}$，$q_t=\frac{v(t)}{A_t}=\frac{\alpha FP(t,T)}{A_t}$，$d_1=\frac{-\ln l+\sum(t,T)^2/2}{\sum(t,T)}$

$$=d_2+\sum(t,T)$$

$$d_3=\frac{-\ln q+\sum(t,T)^2/2}{\sum(t,T)}=d_4+\sum(t,T),\ d_5=\frac{-\ln(q_t^2/l_t)+\sum(t,T)^2/2}{\sum(t,T)}$$

$$=d_6+\sum(t,T)$$

$$\sum(t,T)^2=\int_t^T[((\rho\sigma_A+\sigma_P(\mu,T)))^2+(1-\rho^2)\sigma_A^2]du$$

$P_E(l_t)$，$P_E(q_t^2/l_t)$表示到期日为 T 的两种欧式卖出期权在时刻 t 的价格：

$$P_E(l_t)=-\frac{1}{l_t}N(-d_1)+N(-d_2);P_E(\frac{q_t^2}{l_t})=-\frac{l_t}{q_t^2}N(-d_5)+N(-d_6)$$

Briys 和 de Varenne(1997)模型中公司差价的期限结构受到安全约定及违背严格优先规则的影响。而且模型预测的公司差价更接近于实际观测值，并得到比早期文献更复杂的性质。

结构化模型揭示了公司违约触发机制，指出公司资本结构变化对公司违约的影响，被广泛应用在有违约风险债券的定价中。有以下优点：(1)模型基于公司总价值的波动性，通过标准方法度量违约风险，直接定义违约时间，违约时间与公司的偿还能力相联系；(2)有违约风险权益的定价与对冲技术同标准化新型期权的定价与对冲相似；(3)作为测度债务人杠杆的违约距离，与资产价值波动性相联系，可以反映信用等级；(4)相关违约通过不同随机变量之间的相关性容易处理。但是，也有以下缺点：(1)关于公司资产价值的可观察性假设过于严格，实际上公司资产价值的连续观察是不现实的；(2)假设公司资产为可交易债券是不实际的；(3)当公司债务到期日接近零时，模型往往出现与实际相比较低的信用差价，有必要对违约障碍作更有效的假设，使信用差价的理论值与观察值相符。结构化模型应用中的一个主要问题是估计公司资产价值的波动率比较困难，如在 Merton 模型中，假设公司资产价值的波动率与公司股权的波动率存在某种函数关系，那么估计公司资产价值的波动率非常容易，但是，关于该假设的真实性并没有得到证明。这些局限性限制了结构化模型的应用，导致了另一种违约风险模型的提出与发展。

三、约化模型

约化模型假设违约的时间不确定，把违约看作有强度决定的随机过程，并没有像结构模型那样研究违约机制，而是直接研究瞬间违约概率。Jarrow 和 Turnbull(1995)(JT 模型)通过固定违约损失(LGD)和指数分布的违约时间的假设，提出第一个约化模型，该模型假设违约时间是由违约强度确定的泊松过程，并假设无风险利率过程、风险率过程和违约损失函数互相独立，然而，不变的违约强度假设是不切实际的，虽然这一设定暗示违约为泊松到达，使模型比较容易估计，但是公司更应该有不同的依赖于时间长短的违约强度。为了弥补 Jarrow 和 Turnbull(1995)模型的缺陷，Lando(1998)发展了 Jarrow 和 Turnbull 关于违约强度的概念，进一步将强度看作随机变量，用 Cox 过程描述违约计数过程，违约时间为带有连续时间随机强度的 Cox 过程发生第一次跳跃时间。违约风险定价的关键是如何利用市场可获取数据确定违约强度过程。随后，Jarrow、Lando 和 Turnbull(1997)(JLT 模型)提出了一个较复杂的基于信用等级的定价模型。违约强度过程假设为有限状态的马尔可夫过程，LJT 模型假设违约时间与无风险利率相互独立，在有限状态空间中，违约发生在首次击中违约状态 K 的时间(状态 K－1 是最低信用等级，状态 K 是公司破产状态违约状态)。JLT 模型通过历史经验数据如穆迪公司 S&P 公司

的信用等级转移矩阵中的违约率,来确定违约债券和信用风险的价格。由于模型需要完整的生成矩阵以便得到状态转移概率,Markov 链增加待估参数的个数。Heath、Jarrow 和 Merton(1992)(HJM 模型)假设违约风险与无风险利率相互独立,得出在风险中性概率测度下有违约风险债务的定价公式:$D(F,r,T)=E_t^Q[\exp(-\int_0^T R_t dt)F]$,$R_t=r_t+h_tL_t+l_t$。其中,$r_t$ 为 t 时刻无风险利率,h_t 为 t 时刻违约的风险率,L_t 为 t 时刻部分违约损失。l_t 为 t 时刻违约风险权益的持有成本。Duffie 和 Singleton(1998)(DS 模型)把无风险利率替换为带有违约调整的短期利率。按无风险债券的特点,对有违约风险的债券进行定价分析。Cathcart 和 EI-Jahel(1998)提出一个与结构化模型相似的约化模型。在该模型中,当一个信号过程而不是资产价值击中一些较低的障碍时违约发生。其模型中假设无风险利率为随机 CIR 过程,并且无风险利率过程与信号过程不相关。该模型产生的信用差价期限结构与观察到的信用差价较能吻合。Madan 和 Unal(1998)通过统计发现违约的风险率为股权价格的减函数,结合约化模型与结构化模型的优点,建立第一个违约风险定价的混合模型。Zhou(1997,2001)将结构化模型与约化模型加以整合,并考虑突发事件对信用利差的影响,提出基于跳—扩散过程的违约风险定价模型。Madan 和 Unal(2000)进一步综合基于强度的约化模型与基于期权定价的结构化方法,允许价值过程与随机利率相关,得到有违约风险债券价格的闭式解。由于 Zhou(1997,2001)模型同其他结构化模型一样,低估了短时限信用差价,Kijima 和 Suzuki(2001)用非时齐的泊松过程描述突发事件发生的强度函数,试图修正 Zhou 的跳—扩散过程模型。约化模型一般要求假设:债务发行者的违约过程、违约损失无风险利率过程、无风险利率与违约过程的相关性。

定义 T 时到期的无风险零息债券 t 时价格为 p(t,T),当 T 时刻的挽回率为常数 y,没发生违约的概率(生存概率)为 F(t,T)时,在风险中性测度 Q 下,可以把有违约风险债券的价格定义为:$v(t,T)=p(t,T)E^Q[F(t,T)+y(1-F(t,T))]$。根据测度变换性质,在远期调整测度 Q^T 下,有违约风险债券的价格定义为:$v(t,T)=p(t,T)E^{Q^T}[G(t,T)+y(1-G(t,T))]$。其中,G(t,T)为在远期调整测度 Q^T 下,没发生违约的概率(生存概率)。这样,主要问题变为决定风险中性测度 Q 下的概率 F(t,T),或者在远期调整测度 Q^T 下的概率 G(t,T)。这里介绍 4 个有代表性的模型。

(一)基于信用等级的 Jarrow,Lando 和 Turnbull 模型(JLT 模型)。Jarrow,Lando 和 Turnbull(1997)假设公司违约时间的概率分布可由平稳的离散时间有限状态马尔可夫链刻画,建立一个状态由信用等级类别表示的有限离散时间模型,把信息引入信用等级转移矩阵中,通过信用等级转移矩阵确定违约债券价格。

假设 m 状态为违约状态,Q_{ij} 为可观察到的单一时期由 i 状态转移到 j 状态的统计概率。假设挽回率为 y 的有违约风险债券的支付为 v(t,T);$\frac{v(t,T)}{P(t,T)}=1-[1-F(t,T)](1-y)$。因此没有违约风险的风险中性概率由市场价格推出:$1-F(t,T)=\frac{1}{1-y}[1-\frac{v(t,T)}{P(t,T)}]$。理论上讲,违约的风险中性概率由单一时期的风险中性概率转移矩阵给出,即:$\frac{1}{1-y}[1-\frac{v_i(t,T)}{P(t,T)}]=(\prod_{n-1}^{T}\widetilde{Q}(n))$。这里 i 表示第 i 种信用等级类别,由市场数据决定风险中性概率转移矩阵。

等价风险中性概率转移密度与实际概率转移密度的关系由下式表示:$\widetilde{Q}(n)_{ij}=\pi_i(n)Q_{ij}$,对于 $i\neq j$。这里 $\pi_i(n)$ 可以理解为风险升水,即把实际转移概率转换为风险中性概率的风险调整因子。然而

$$\widetilde{Q}(n)_{ij}=1-\sum_{j\neq i}\widetilde{Q}_{ij}(n)=1-\pi_i(n)\sum_{j\neq i}Q_{ij}=1+\pi_i(n)(Q_{ii}-1)$$

因此,有:$\widetilde{Q}(n)-1=\mathrm{diag}\pi(n)(Q-1)$。

问题变为解下列的线性方程:

$$[\prod_{n=1}^{T-1}\widetilde{Q}(n)]^{-1}(1-\frac{v_i(0,T)}{p(0,t)})=[I+\mathrm{diag}\pi(T)](Q-1)e_m$$

这里 e_m 为 m 维单位矩阵的的第 m 列。

JKL 模型可以通过历史经验数据如穆迪公司的特别报告及标准普尔公司的信用调查资料信用等级转移矩阵中违约率,来确定违约债券与信用风险的价格,也可以通过观察的违约债券价格来确定同一信用等级的违约率。模型对不同信用等级债券使用不同违约率,结合各种无风险债券期限结构模型,并用历史信用等级转移概率数据估计模型参数。但是,基于信用等级的定价模型隐含同一信用等级的公司具有相同的信用差价,使模型的精度难以保证。因此,Arvanitis,Gregory 及 Laurent(1999)[1] 的模型放松该假设,则同一信用等级的公司的信用风险不一定相同,建立违约风险的定价模型,并广泛应用于债券、信用互换及其他信用衍生品的定价。

(二)基于混合方法的 Madan 和 Unal 模型 1。Madan 和 Unal(1998)通过统计发现违约的风险率为股权价格的减函数,结合约化模型与结构化模型的特点,建立第一个违约风险定价的混合模型,为了得到生存概率,必须如结构化模型一样解偏微分方程。

模型假设 e(t) 为股票的价格过程,那么 $s(t)=e(t)/B(t)$ 为以货币市场账户计价的价格过程,该贴现价格过程为鞅:$ds(t)=\sigma s(t)dW(t)$。这里 $\sigma\in R_+$ 为正常数,W(t) 为风险中性测度下的标准维纳过程,Madan 和 Unal 进一步假设风险率为:$\lambda(t)=\phi[s(t)]=\frac{c}{[\ln(\frac{s(t)}{\delta})]^2}$。

有违约风险债券的价格可由没违约风险债券的价格、违约概率、违约挽回率给出，在风险中性测度下时间 t 和 T 之间的生存概率为：$F(t,T)=\psi[t,s(t),T]$。

容易观察到$(-\int_0^t\lambda(u)du)\psi(s,t)$是风险中性概率下的鞅，由 ITO 引理得 Ψ 满足下面偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\mathrm{Trace}[\psi_{ss}(t,s,T)\sigma(t,s)\sigma'(t,s)]+\psi_t(t,s,T)=\phi(t,s)\psi(t,s,T)$$

边界条件：$\psi(T,s,T)=1$。解由下式给出：

$\psi(s,t)=G_a[\frac{2}{d^2(s,t)}]$，这里 $d=\frac{\log(s/\delta)}{\sigma\sqrt{T}}-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$，$a=\frac{c}{2\sigma^2}$。

$G_a(y)$满足下面的常微分方程：

$y^2G''+(\frac{3y}{2}-1)G'-aG=0$，约束于 $G(0)=1$，$G'(0)=-a$。这样可以计算出在远期调整测度下时间 t 和 T 之间的生存概率近似为 $G(y)\approx e^{-ay}$。

（三）基于跳—扩散过程的 Zhou 定价模型。Zhou（1997，2001）结合了结构化方法与约化方法的优点，并考虑突发风险对信用差价变化的影响，将突发风险引入违约过程，在综合结构化模型和约化模型的基础上，提出跳—扩散模型。模型中违约边界和无风险利率与 Morton 模型相同，假设违约的挽回率与公司资产结构和资产价值相联系，挽回率成为模型中的内生随机变量，既体现了约化模型的灵活性，又能像规范结构化模型一样揭示违约机理。

模型假设公司资产价值 V 满足以下的跳—扩散过程：$dV_t/V_t=(\mu-\lambda v)dt+\sigma dZ_t+(\Pi-1)dY_t$。其中 μ_t 为公司资产价值的期望收益率，v、λ、σ 为正常数，Z_t 为标准的布朗运动，Y_t 强度为 λ 的泊松过程，$\Pi>0$ 是期望值为 $v+1$ 的跳跃幅度，dZ_t、dY_t、Π 相互独立。

假设Π为独立同分布的对数正态分布过程，则 $\ln(\Pi)\sim N(\mu_\pi,\sigma_\pi^2)$，该假设暗示：$v=E[\Pi-1]=\exp(\mu_\pi+\sigma_\pi^2/2)-1$。

假设当公司资产价值 V 低于边界值 L 时，违约发生，则发生违约事件的概率可表示为：

$$P\{V_t\leqslant L\}=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y_t=i)\cdot P\{\ln V\leqslant \ln L\mid Y_t=i\}$$

与其他模型相比，跳跃成份可以解释资产价值的不连续下跌。而且资产价格具有厚尾特征，与观察到的信用差价一致。然而，模型依旧存在着不随时间变化的违约边界，而且同结构化模型一样，低估了短时限风险。

（四）基于两因素风险率的 Madan 和 Unal 模型 2。Madan 和 Unal(200●)进一步将基于强度模型以结构化方法加以整合，将违约看作由触发事件引起不可预期的损失 L，损失率为常数 λ，损失分布是均值为 μ_L 的指数分布 F(L)，避免了建立复杂的跳跃资产价值过程，并且允许价值过程与随机利率相关，得

到有违约风险债券价格的闭式解。

假设公司的资产由现金资产 V 和利率敏感性资产 $g(t,r)$ 两部分组成，r 为即期利率，$v(t,T,r)$ 为公司负债，则公司资产价值为：$E=V+g(t,r)-v(t,T,r)$。其中，公司初始资产为 E_0。当下式满足时，违约发生：$L\geq E=V+g(t,r)-v(t,T,r)$。

违约风险率函数为：$h(V,r)=\lambda[1-M(V+g(t,r)-v(t,r))]$。

当累积分布函数满足以下形式时，$M(L)=1-\exp(-L/\mu_L)$，其中 μ_L 为指数分布的均值。

违约风险通过简单的一阶近似定义为：

$$h(V(t),r(t))\approx\lambda(1-F(E_0)-\frac{\lambda}{\mu_L}\exp(-\frac{E}{\mu_L})V_0(\Delta\ln V)+\frac{\lambda}{\mu_L}\exp(-\frac{E_0}{\mu_L})D(\Delta r)$$

其中：$\Delta\ln V=\ln V(t)-\ln V_0$，$\Delta r=r(t)-r_0$，

$$F(L)=1-\exp(-L/\mu_L),a=\lambda[1-F(E_0)]+b\ln(V_0)-cr_0,b=\frac{\lambda}{\mu_L}\exp(-\frac{E_0}{\mu_L})$$

$$E_V^0V_0,c=\frac{b}{E_V^0V_0}D$$

这里 D 为公司净资产的持久期。假设公司的现金资产的价值为：$dV=rVdt+\sigma VdW_V(t)$。其中，$W_V(t)$ 为风险中性测度下的标准维纳过程。

假设无违约风险利率满足 Vasicek 的利率模型：$dr=k(\theta-r)dt+\eta dW_r(t)$。其中，$W_r(t)$ 为风险中性测度下的标准维纳过程。

假设现金资产价值与随机利率的相关系数为 ρ，违约挽回率为 y，则得到有违约风险贴现债券价格的封闭式解为：$v(\tau)=yp(t,\tau)+p(t,\tau)(1-y)G(t,\tau)$。其中，$G(t,\tau)$ 为远期调整测度下的生存概率，$v(\tau)=yp(t,\tau)+p(t,\tau)(1-y)G(t,\tau)$ 为 Vasicek 的利率模型假设条件下的无违约风险贴现债券价格。

瞬间信用差价为：

$$CS_0=a-b\ln V+cr+\frac{1}{k^2}(b\theta+\eta b\rho c(1-\sigma)+\eta^2c)+\frac{1}{k_3}(\eta b^2\rho-\eta^2b^2-\eta^2b$$
$$-\eta^2bc(1-\rho))+\frac{1}{k^4}(\eta^2b^2)$$

其中，θ、k、η 为 Vasicek 利率模型中的参数。

通过上述分析，可以看出约化模型与结构化模型相比，有以下优点：(1)没必要对公司资产价值过程与违约触发障碍进行特定的假设；(2)违约风险度量只反映在单一性质，即风险中性违约强度中；(3)违约的随机时间是不可测定时，发生违约事件几乎是突然的；(4)有违约风险权益的定价是相当直接的，类似于期限结构模型中无风险未定权益的定价；(5)与结构化模型相比，信用差价非常容易量化，因此，信用差价的估计与实际更加相符，风险贴水更容易处理。但是，也存在以下缺点：(1)模型中没有考虑公司当前资产与公司的财务

杠杆;(2)关于安全约定与债务等级的特点不容易掌握;(3)关于投资组合违约风险定价的实际方法通常是约化模型与结构化模型的结合。

四、结束语

文中介绍了不少违约风险定价模型,从与公司资产价值动态过程相联系的结构化模型,到与风险率相联系的约化模型,大多数文献集中于研究零息债券,但是,市场中多数的债券是带息债券。为了解释可交易带息债券的价格,需要更复杂的经验研究,这也许是将来的一个研究方向。关于约化模型,当前研究主要集中于违约的到达时间方面,很少涉及违约挽回率,关于挽回率的研究也是必要的,而且结构化模型与约化模型的结合也是将来研究的一个趋势。

参考文献:

[1]Arvanitis A,Gregory J Laurent,J. P. Building models for credit spreads[J]. The Journal of Derivatives,Spring,1999:27～43.

[2]Belanger A,Shreve S E,Wong D A. General framework for pricing credit risk[J]. Forthcoming in Mathematical Finance,2001.

[3]Brenam M,E. Schwartz. Analyzing convertible Bonds[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis,1980(15):907～929.

[4]Briys E F de Varenne. Valuing risky fixed debt:An extension[J]. Journal of Finance and Quantitative Analysis,1997(32):239～248.

[5]Cooper L,A Mello. The default risk of swaps[J]. Journal of Finance,1991(46):597～620.

Comparative Analysis of The Pricing Default Theories

WU Heng-yu,CHEN Jin-xian

(1. *School of Management*, *Zhongshan University*, *Guangzhou* 510275,*China*;
2. *School of Management*, *Xi'an Jiaotong University*, *Xi'an* 710049,*China*)

Abstract: This paper surveys the developments in the finance literatures with respect to pricing default. A broad description of the issues is followed by a summary of the main points and features of the models. Both the structural model and Reduced-form model are presented and reviewed briefly.

Key words: structural model; reduced-form model; pricing the risks of default

(责任编辑 许波)